Filière PC

EPREUVE DE MATHEMATIQUES I - ANALYSE

Durée : 3 heures

L'usage des calculatrices est autorisé.

La présentation et la rigueur des solutions seront deux éléments importants dans l'appréciation des copies. En particulier, les candidats sont priés d'énoncer avec précision les hypothèses des théorèmes utilisés.

Partie I

Dans cette partie on définit une fonction φ sur $[0,+\infty[$ par :

$$\varphi(x) = \exp(-x^{\frac{1}{3}})\sin(\sqrt{3}\,x^{\frac{1}{3}}).$$

1) On pose $a = -1+i\sqrt{3}$.

Pour tout entier naturel n calculer le module et un argument de a^n.

2) Montrer que si h est une fonction à valeurs complexes, bornée et continue sur $[0,+\infty[$, alors la fonction H définie par : $t \mapsto t^n\, h(t)\, \exp(\, at^{\alpha}\,)$ est intégrable sur $[0,+\infty[$, pour tout entier naturel n et pour tout réel $\alpha > 0$.

3) On pose pour tout entier naturel n :

$$I_n = \frac{1}{n!}\int_0^{+\infty} t^n \exp(a\,t)\; dt$$

$$J_n = \frac{1}{(3n+3)!}\int_0^{+\infty} t^n \exp(a\,t^{\frac{1}{3}})\; dt\,.$$

a) Justifier l'existence de I_n et de J_n.

b) Calculer I_n en fonction de n.

c) Calculer J_n à l'aide d'un changement de variable puis déterminer le réel $r < 0$ tel que pour tout entier naturel n:

$$J_n = \frac{1}{(n+1)\, r^{n+1}}$$

4) En utilisant I 3 c) montrer que pour tout entier naturel n :

$$\int_0^{+\infty} t^n \ \varphi(t)dt \ = 0$$

Partie II

On identifie un polynôme P et sa fonction associée $x \mapsto P(x)$.

Avec les notations de la question I 3 on désigne par g la fonction définie pour le réel t par :

$$g(t) = \sum_0^{+\infty} J_n \ t^{n+1}$$

1) a) Quel est le rayon de convergence R de cette série entière? Déterminer l'ensemble de définition de g .

b) Etudier la convergence uniforme de cette série entière sur $[0,R]$, puis sur $]-R,0]$.

c) Exprimer g à l'aide des fonctions usuelles.

d) A l'aide de II 1b) montrer qu'il existe une suite de polynômes qui converge uniformément vers g sur $[0,1]$.

2 a) Plus généralement si f désigne une fonction continue sur $[0,1]$ à valeurs réelles, justifier l'existence d'une suite de polynômes $(P_n)_{n\geq 0}$ qui converge uniformément vers f sur $[0,1]$.

b) Prouver alors que: $\lim_{n\to+\infty} \left(\int_0^1 P_n(t)\, f(t)dt \right) = \int_0^1 f(t)^2 dt$.

3) On suppose dans cette question que f est continue sur $[0,1]$ et vérifie pour tout entier naturel n:

$$\int_0^1 t^n f(t)dt = 0$$

Démontrer que : $\forall x \in [0,1] \quad f(x) = 0$.

Partie III

Dans cette partie f désigne une application continue sur $[0,+\infty[$ à valeurs réelles .

On pose, pour tout entier naturel non nul n si la fonction t→f(t) exp(-nt) est intégrable sur $[0,+\infty[$:

$$a_n = \int_0^{+\infty} f(t) \exp(-nt)\, dt$$

et $\quad S(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n\, t^n$ si cette série converge

On note $\hat{f}$ la fonction définie sur $[0,1]$ par :

$$\begin{cases} \hat{f}(t) = f(-\ln(t)) & \text{si } t \in]0,1] \\ \hat{f}(0) = 0 \end{cases}$$

1) On suppose dans cette question que f admet une limite nulle en $+\infty$.

a) Montrer que $\hat{f}$ est continue sur $[0,1]$.

b) Prouver que $t \mapsto f(t)\exp(-nt)$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.

c) Etablir que pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$\int_0^1 \hat{f}(t)\, t^{n-1} dt = a_n$$

d) En déduire la limite de a_n quand n tend vers $+\infty$.

e) Montrer que:

si $\quad \forall t \in]-1\ ,\ 1[\quad S(t) = 0$

alors $\quad \forall x \in [0,+\infty[\quad f(x) = 0$.

2) On suppose dans cette question que f est intégrable et strictement positive sur $[0,+\infty[$.

a) Montrer que a_n existe et déterminer sa limite quand n tend vers $+\infty$.

b) Quelle est la nature de la série $\sum_{n \geq 1} a_n$?

c) En déduire le rayon de convergence R' de la série entière $\sum_{n \geq 1} a_n \, t^n$ et exprimer sa somme sur $]-R', R'[$ à l'aide d'une intégrale.

3) Dans cette question on suppose que F est une fonction continue sur $[0,+\infty[$, à valeurs réelles, et qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que F soit dominée, au voisinage de $+\infty$, par $t \mapsto \exp(\alpha\, t)$.

a) Prouver que pour tout réel $m > \alpha$ la fonction $t \mapsto F(t)\, \exp(-mt)$ est intégrable sur $[0,+\infty[$.

b) Montrer que:

si pour tout réel $m > \alpha$ on a $\int_0^{+\infty} F(t)\, \exp(-m\, t)\, dt = 0$

alors F est nulle sur $[0,+\infty[$.